УДК 517.95

Н. М. Бокало

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Получены условия на коэффициенты почти линейных параболических уравнений, при выполнении которых задача Коши, первая краевая задача и задача без начальных условий в неограниченных областях имеют не более одного решения в классах функций с произвольным поведением на бесконечности. В частности, этим условиям удовлетворяет уравнение

$$u_t - a_{ij}(x,\ t)\ u_{x_ix_j} + c(x,\ t,\ u) = f(x,\ t),$$

где a_{ij}, i, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ — ограниченные функции; $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$, $c_s'(x,\ t,\ s) \geqslant k\,|\,s\,|^{m-1}$, $k = \mathrm{const} > 0$, $m > 1$. Аналогичный результат установлен для почти линейных эллиптических уравнений.

Как известно (см., например, [1, 2]), единственность решений краевых задач для линейных параболических и эллиптических уравнений в неограниченных областях обеспечивается некоторыми условиями на поведение решений на бесконечности. Вообще говоря, аналогичная ситуация с единственностью решений и в случае нелинейных уравнений [3]. Но оказалось, что существуют нелинейные параболические и эллиптические уравнения, для которых краевые задачи в неограниченных областях имеют не более одного решения в классах функций с произвольным поведением на бесконечности. Впервые такой результат установлен в [4], где рассматривалась задача без начальных условий для уравнений типа нестационарной фильтрации. Аналогичный результат для более широких классов уравнений получен в [5]. Заметим, что в этих работах предполагается ограниченность пересечений гиперплоскостями $t = \mathrm{const}$ области задания задачи. Единственность решений первой краевой задачи, задачи Коши и задачи без начальных условий в произвольных областях при отсутствии ограничений на поведение решений на бесконечности доказана только для простых почти линейных параболических и эллиптических уравнений [6—8]. В данной работе получен такой же результат для более общих почти линейных параболических и эллиптических уравнений.

Рассматривается задача

$$u_t - a_{ij}(x, t)\, u_{x_ix_j} + b_i(x, t)\, u_{x_i} + c(x, t, u) = f(x, t) \ \text{ в } \ Q, \tag{1}$$

$$u = h \ \text{ на } \ \Gamma(Q), \tag{2}$$

где Q — произвольная область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, которая лежит в полупространстве $\{x,\ t\,|\,t < T\}$ при некотором $T \leqslant +\infty$, $\Gamma(Q) = \partial Q \cap \{x,\ t\,|\,t < T\}$ — параболическая граница области Q; функции $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, i, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, f определены всюду на Q, причем $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ для любых $(x,\ t) \in Q$, $\xi \in R^n$, функция $c(x,\ t,\ s)$ определена всюду на $Q \times \mathbb{R}^1$; функция h определена и непрерывна на $\Gamma(Q)$. Здесь и далее предполагается, что по индексам, которые повторяются, ведется суммирование от 1 до n.

Задача (1), (2) является: а) задачей Коши, если $Q = \{x,\ t\,|\,0 < t < T\}$; б) задачей Дирихле, если $Q \subset \{x,\ t\,|\,0 < t < T\}$ и $Q \cap \{x,\ t\,|\,t = \tau\} \neq \varnothing$ для всех $\tau \in (0,\ T)$; в) задачей без начальных условий, если $Q \cap \{x,\ t\,|\,t = \tau\} = \varnothing$ для всех $\tau < T$. Нас будет интересовать классическое решение задачи (1), (2), под которым мы понимаем непрерывную на $Q \cup \Gamma(Q)$, дважды дифференцируемую по x и раз — по t на Q функцию $u(x,\ t)$, которая удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Обозначим

$$P_R^\tau = \{x,\ t\,|\,|x|^2 + |t-\tau| < R,\ t \leqslant \tau\},\ \ S_R^\tau = \{x, t\,|\,|x|^2 + |t-\tau| = R^2, t \leqslant \tau\}.$$

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1992. Вып. 4.

Очевидно, что P_R^τ — множество, ограниченное параболоидом $|x|^2 + |t - \tau| = R^2$ и плоскостью $t = \tau$, а S_R^τ — параболическая часть границы множества R_R^τ.

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) дополнительно удовлетворяют следующим условиям:

(А) для произвольных $s_1, s_2 \in R^1$ и $(x, t) \in Q$

$$[c(x, t, s_1) - c(x, t, s_2)][s_1 - s_2] \geqslant q(x, t)|s_1 - s_2|^{m+1},$$

где $m > 1$, $q(x, t) > 0$;

(Б) для каждого $\tau < T$ существует определенная на $[0; +\infty)$ функция $\gamma_\tau(R) > 0$, такая, что $\gamma_\tau(R) \to 0$ при $R \to +\infty$ и для произвольного $R > 0$

$$\sup_{(x,t)\in Q\cap P_R^\tau} (1 + 2\nu + \max\{0; 4\mu(m+1)/(m-1) - \nu - 1\}) q^{-1} = $$
$$= \gamma_\tau(R)(R^2 + 1),$$

где $q(x, t)$ и m из условия (А), $\nu = \nu(x, t)$ — след матрицы $\| a_{ij} \|$, т. е. $\nu = a_{ii}(x, t)$, $\mu = \mu(x, t) > 0$ — функция, удовлетворяющая неравенству $a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu |\xi|^2$ для всех $(x, t) \in Q\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$;

(В) $b_i(x, t) = b_i^0(x, t) x_i$, где $b_i^0 \geqslant 0$ на Q, $i = 1, \ldots, n$.

Заметим, что условия (А), (Б), (В) выполняются, в частности, для уравнения

$$u_t - a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + c(x, t, u) = f(x, t),$$

где a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ — ограниченные на Q функции, $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$, $c_s'(x, t, s) \geqslant k|s|^{m-1}$ ($k = \text{const} > 0$) для всех $s \in R$, $m > 1$ (например, $c(x, t, s) = |s|^{m-1} s$).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (А), (Б), (В). Тогда задача (1), (2) имеет не более одного классического решения.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — решения задачи (1), (2). Для функции $w = u_1 - u_2$ из уравнения (1) получаем соотношение

$$w_t - a_{ij} w_{x_i x_j} + b_i w_{x_i} + c^*(x, t, u_1 u_2) w = 0 \text{ в } Q, \tag{3}$$

где $c^*(x, t, u_1, u_2) = (c(x, t, u_1) - c(x, t, u_2))/(u_1 - u_2)$, если $u_1 \neq u_2$ и $c^*(x, t, u_1, u_2) = 0$, если $u_1 = u_2$. Слагая и вычитая в левой части уравнения (3) выражение $q(x, t)|w|^{m-1} w$, приходим к равенству

$$w_t - a_{ij} w_{x_i x_j} + b_i w_{x_i} + q|w|^{m-1} w + (c^*(x, t, u_1, u_2) -$$
$$- q(x, t)|u_1 - u_2|^{m-1}) w = 0. \tag{4}$$

Зафиксируем произвольно выбранные $R > 0$ и $\tau < T$ и рассмотрим функцию

$$v^{\tau,R} = \eta_\tau(R)/[R^2 - |x|^2 - |t - \tau|]^\alpha,$$

$\alpha = 2/(m - 1)$, $\eta_\tau(R) = (\alpha(R^2 + 1)\gamma_\tau(R))^{\alpha/2}$, $\gamma_\tau(R)$ из условия (Б). Легко убедиться, что функция $v^{\tau,R}$ определена на R_R^τ и удовлетворяет на R_R^τ неравенству

$$(v^{\tau,R})_t - a_{ij}(v^{\tau,R})_{x_i x_j} + b_i(v^{\tau,R}) x_i + q(v^{\tau,R})^m \geqslant 0. \tag{5}$$

Вычитая из равенства (4) неравенство (5), получаем (на $Q \cap P_R^\tau$)

$$(w - v^{\tau,R}) - a_{ij}(w - v^{\tau,R})_{x_i x_j} + b_i(w - v^{\tau,R})_{x_i} + q(|w|^{m-1} w - \tag{6}$$
$$- |v^{\tau,R}|^{m-1} v^{\tau,R}) + (c^*(x, t, u_1, u_2) - q|u_1 - u_2|^{m-1}) w \leqslant 0.$$

Из соотношения (6) и свойств функции $v^{\tau,R}$ следует выполнение на $Q \cap P_R^\tau$ неравенства $|w(x, t)| < v^{\tau,R}(x, t)$. Действительно, предположим, что $w > v^{\tau,R}$ в некоторых точках множества $Q \cap P_R^\tau$. Поскольку $v^{\tau,R}(x, t) \to +\infty$, если $\operatorname{dist}((x, t), s_R^\tau) \to 0$, $v^{\tau,R} > 0$ на P_R^τ и $w = 0$ на $\Gamma(O)$, то существует достаточно малое $\delta > 0$, такое, что $w - v^{\tau,R} < 0$ на $(P_R^\tau \setminus P_{R-\delta}^\tau) \cap Q$ и на $(\overline{P_{R-\delta}^\tau \cap Q}) \setminus P_{R-\delta}^\tau \cap Q$. Учитывая это, из нашего предположения и непрерывности функции $w - v^{\tau,R}$ на компакте $\overline{P_{R-\delta}^\tau \cap Q}$ следует, что существует точка $(x_0, t_0) \in Q \cap P_{R-\delta}^\tau$, в которой функция $w - v^{\tau,R}$ принимает максимальное на $Q \cap P_R^\tau$ положительное значение. Но это значит, что в точке (x_0, t_0) левая часть неравенства (6) принимает положительное значение, поскольку первые три члена левой части в этой точке неотрицательные (это показывается аналогично — как придоказательстве принципа максимума), четвертый член — положительный вследствие строгой монотонности функции $\varphi(\lambda) = |\lambda|^{m-1}\lambda$ и неравенства $w(x_0, t_0) > v^{\tau,R}(x_0, t_0)$, а пятый член — неотрицательный в силу условия (A) и того, что $w(x_0, t_0) > 0$. Получили противоречие. Аналогично устанавливается, что $w \leqslant v^{\tau,R}$ на $Q \cap P_R^\tau$. Следовательно, $|w| \leqslant v^{\tau,R}$ на $Q \cap P_R^\tau$.

Из сказанного следует, что для произвольно выбранной и фиксированной точки $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q$ имеет место оценка

$$w(\bar{x}, \bar{t}) \leqslant \bar{v}^{\tau,R}(\bar{x}, \bar{t}) \tag{7}$$

для любых $\bar{t} \leqslant \tau < T$, $R > |\bar{x}|$. Положив $\tau = \bar{t}$ и сделав в (7) граничный переход при $R \to +\infty$, получим $w(\bar{x}, \bar{t}) = 0$. Отсюда, учитывая произвольность точки $(\bar{x}, \bar{t})$, имеем $w \equiv 0$, т. е. $u_1 \equiv u_2$ на Q. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу

$$a_{ij}(x) u_{x_i x_j} - b_i(x) u_{x_i} - c(x, u) = f(x) \text{ в } \Omega, \tag{8}$$

$$u = h \text{ на } \partial\Omega, \tag{9}$$

где Ω — произвольная область в $\mathbb{R}_x^n$ с границей $\partial\Omega$; функции a_{ij}, b_i, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, f определены всюду на Ω, причем $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$; функция $c(x, s)$ определена на $\Omega \times \mathbb{R}^1$; функция h определена и непрерывна на $\partial\Omega$. Классическим решением задачи (8), (9) назовем непрерывную на $\bar{\Omega}$ и дважды дифференцируемую на Ω функцию $u(x)$, которая удовлетворяет уравнению (8) и условию (9).

Теорема 2. Пусть для коэффициентов уравнения (8) выполняются условия (A), (Б), (В) с заменой Q на Ω и (x, t) на x. Тогда существует не более одного классического решения задачи (8), (9).

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что любое решение $u(x)$ задачи (8), (9) является решением следующей задачи без начальных условий:

$$u_t - a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + b_i(x) u_{x_i} + c(x, u) = -f(x) \text{ в } Q = \Omega \times \mathbb{R}^1,$$
$$u = h \text{ на } \Gamma(Q) = \partial\Omega \times \mathbb{R}^1,$$

а для нее справедлива теорема 1.

1. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук.— 1976.— 31, вып. 6.— С. 142—166.
2. *Ивасишен С. Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн.— 1982.— 34, № 5.— С. 547—552.
3. *Шишков А. Е.* О существовании растущих на бесконечности обобщенных решений краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Там же.— 1985.— 37, № 4.— С. 473—481.
4. *Бокало Н. М.* О задаче Фурье для квазилинейных параболических уравнений // Успехи мат. наук.— 1984.— 39, вып. 4.— С. 128—129.
5. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 14.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989.— С. 3—32.
6. *Бокало Н. М.* О единственности решения задачи без начальных условий для нелинейных параболических уравнений // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, вып. 5.— С. 163—164.
7. *Чистяков В. В.* О некоторых качественных свойствах решений недивергентного полулинейного параболического уравнения второго порядка // Там же.— С. 199—200.
8. *Brezis H.* Semilinear equations in R^N without condition atinfinity // Appl. Math. Optim.— 1984.— 12.— P. 271—282.

Львов. гос. ун-т — Получено 10.10.90